ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

М.В. Кретов

К ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В данной работе в трехмерном аффинном пространстве исследуются подклассы $\overline{K}_3^{01}$ -изученных в работе [1] комплексов (трехпараметрических семейств) K_3^{01} эллипсоидов q, с которыми ассоциируются [2] дифференцируемые отображения, не пересекающиеся с классами $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\varkappa}}$, $\varkappa=\overline{1,6}$; [3]. На основе полученных геометрических свойств многообразий $\overline{K}_3^{01}$ найдено их безынтегральное представление.

В статье используются обозначения, введенные ранее в работе [1]. Отнесем эллипсоид q к каноническому реперу $R=\{A,\overline{e}_J\}$; $J,\jmath,\ldots=\overline{1,3}$, который геометрически характеризуется следующим образом: вершина A помещается в центр C квадрики q, векторы $\overline{e}_J$ сопряжены, и концы A_J этих векторов лежат на эллипсоиде q и принадлежат его фокальному многообразию [4]; при этом индикатриса вектора $\overline{e}_1$ является прямой, параллельной вектору $\overline{e}_1$.

О п р е д е л е н и е. Назовем комплекс K_3^{01} комплексом $\overline{K}_3^{01}$, если индикатриса вектора $\overline{e}_2-\overline{e}_3$ является прямой, параллельной вектору $\overline{e}_1$.

Из определения комплекса $\overline{K}_3^{01}$ следует, что $b=0$, поэтому его система дифференциальных уравнений Пфаффа будет иметь вид:

$$\omega_J^J=-\omega^J,\quad \omega_1^2=\omega_1^3=0,\quad \omega_2^1=\beta\omega^3,\quad \omega_3^1=\beta\omega^2,$$
$$\omega_2^3=-\omega^3,\quad \omega_3^2=-\omega^2,\quad d\ln\beta=\omega^1+\omega^2+\omega^3, \tag{1}$$

где по J нет суммирования.

Анализируя систему (1), убеждаемся в том, что комплексы $\overline{K}_3^{01}$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений с произволом десяти постоянных.

Обозначим асимптотические линии на поверхности (A_1), ассоциированной с комплексом $\overline{K}_3^{01}$, символами γ_1 и γ_2, которые в репере R задаются соответственно уравнениями:

$$\omega^2=0,\quad \omega^3=0. \tag{2}$$

Уравнения φ-основной и ψ-основной гиперплоскостей [3], ассоциированных с многообразием $\overline{K}_3^{01}$, соответственно, имеют вид:

$$4X^1+5X^2+5X^3-4=0, \tag{3}$$

$$3(3\beta^4+10\beta^2+8)X^1+(5\beta^4+24\beta^2+32)X^2+$$
$$+(5\beta^4+24\beta^2+32)X^3=4(\beta^2+2)(\beta^2+4). \tag{4}$$

Используя уравнения (1)-(4), можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а. Комплексы $\overline{K}_3^{01}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ прямые $\ell=(A_2,\overline{e}_1)$, $m=(A,\overline{e}_2)$ и $\tilde{\ell}=(A_3,\overline{e}_1)$ -неподвижны; 2/ при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 прямая $\tilde{m}=(A_1,\overline{e}_3)$ и координатная плоскость $(A,\overline{e}_1,\overline{e}_3)$ неподвижны; 3/ поверхность (A_3) вырождается в прямую, параллельную вектору $\overline{e}_1$, 4/ точка $P=A+\overline{e}_1+\overline{e}_2$ неподвижна при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2; 5/ класс отображений, порожденный комплексом $\overline{K}_3^{01}$, не пересекается с классами $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\varkappa}}$.

Найденные геометрические свойства комплекса $\overline{K}_3^{01}$ позволяют построить его безынтегральное представление. Для этого проводим следующие построения: 1/ зададим произвольную прямую ℓ и фиксируем на ней точку P; 2/ проводим прямую $\tilde{\ell}$, параллельную прямой ℓ, и выбираем на ней точку A_3; 3/ задаем плоскость π, проходящую через прямую ℓ и не содержащую прямую $\tilde{\ell}$; 4/ проводим на плоскости π через точку P прямую m; 5/ в плоскости π выбираем точку A ,неинцидентную прямым ℓ и m ,через эту точку проводим прямые,параллельные ℓ и m. В пересечении с прямыми m и ℓ получим точки A_1 и A_2.

С текущей точкой плоскости π совмещаем подвижной репер $\widetilde{R}=\{0,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ такой ,что $0\equiv A$ и $\bar{e}_J=\overline{AA}_J$. Образующий элемент комплекса - эллипсоид q ,соответствующий центру A ,однозначно определяется точками A_J, центром A и сопряженными направлениями $\overline{AA}_J$.При движении точки A в плоскости π получается двухпараметрическое семейство эллипсоидов q ,а при перемещении точки A_3 по прямой $\widetilde{\ell}$ получается комплекс квадрик q ,который мы назовем комплексом $\overline{K}^{01}_{3*}$.

Можно доказать,что построенный таким образом комплекс эллипсоидов q совпадает с комплексом $\overline{K}^{01}_3$,т.е. определяется в репере $\widetilde{R}$ системой дифференциальных уравнений Пфаффа (1).

Список литературы

1.Кретов М.В. О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве.-Калининградский ун-т,Калининград,1981 ,22 с.,библиограф.I7 назв.(Рукопись деп.ВИНИТИ АН СССР I7 ноября I98Iг.,№ 5272-8I Деп.)

2.Кретов М.В. Дифференциальная геометрия соответствий,ассоциированных с комплексами эллипсоидов.-Тезисы докладов УI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин,1984,с.66.

3.Кретов М.В. О специальных подклассах дифференцируемых отображений,ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984,вып.I5,с.49-54.

4.Малаховский В.С.,Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.Тр.геометрич. семинара.ВИНИТИ АН СССР,1974,т.6,с.113-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I6 1985

УДК 514.75

В.С.М а л а х о в с к и й

СТРУКТУРЫ,ПОРОЖДАЕМЫЕ ПОЛЕМ ГИПЕРКВАДРИК

Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n,в каждом касательном пространстве $\mathcal{D}^1_n$ которого задана центральная невырожденная гиперквадрика Q .

Исследуются структуры,порождаемые на M_n полем гиперквадрик Q .

Пусть ω^i -базовые 1-формы гладкого многообразия M_n .Имеем [1]:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,$$
$$d\omega^j_i=\omega^k_i\wedge\omega^j_k+\omega^k\wedge\omega^j_{ik},\qquad(1)$$
$$d\omega^i_{i_1i_2\dots i_p}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s!(p-s)!}\omega^k_{(i_1\dots i_s}\wedge\omega^j_{i_{s+1}\dots i_p)k}+\omega^k\wedge\omega^j_{i_1\dots i_pk}.$$

Обозначим через x^i -координаты вектора $x\in\mathcal{D}^1_n$ или,что то же,координаты точки x центроаффинного пространства $\mathcal{D}^1_n$ относительно базиса $\{e_i\}$. Имеем:

$$x=x^i\vec{e}_i.\qquad(2)$$

Уравнение центральной невырожденной гиперквадрики $Q\in\mathcal{D}^1_n$ с центром

$$C=c^ie_i\qquad(3)$$

запишется в виде:

$$a_{ij}x^i(x^j-2c^j)-1=0,\qquad(4)$$

причем

$$\det\|a_{ij}\|\neq0.\qquad(5)$$